

高考分段函数问题考点透视

■ 安徽省太湖中学 李昭平

一般地,在自变量的不同取值范围内,函数有着不同的对应关系,这样的函数常常称为分段函数.分段函数的定义域和值域分别是几段函数定义域和值域的并集.分段函数问题往往融函数、方程、不等式、图像、导数等知识于一体,具有涉及面广、综合性强、解法灵活的特点,是高考经久不衰的高频考点.下面结合近几年部分高考题和模考题透视考点,仅供参考.

1. 考查求函数值

例 1. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 2(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$ 若 $f(a) = f(a+1)$, 则 $f(\frac{1}{a}) =$

()

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

解析: 由分段函数的结构知, 其定义域是 $(0, +\infty)$, 所以 $a > 0$.

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, $a+1 > 1$, 则 $f(a) = f(a+1)$ 就是 $\sqrt{a} = 2(a+1)$, $a = \frac{1}{4}$. 于是 $f(\frac{1}{a}) = f(4) = 6$. (2) 当 $x > 1$ 时, $a+1 > 1$, 则 $f(a) = f(a+1)$ 就是 $2(a+1) = 2(a+1-1)$, 方程无解.

综上所述, $f(\frac{1}{a}) = 6$. 故选 C.

点评: 本题主要考查分段函数的定义域、分段函数的意义、分类讨论思想和方程思想. 在利用 $f(a) = f(a+1)$ 构建方程时, 要注意自变量的值在哪段内, 不能代错分段解析式.

训练 1: 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1, 1)$ 上有 $f(x) = \begin{cases} x+a, & -1 \leq x < 0 \\ |-\frac{2}{5}x|, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ 其中 $a \in \mathbb{R}$. 若 $f(-\frac{5}{2}) = f(\frac{9}{2})$, 则 $f(5a)$ 的值是_____.

解析: 因为 $f(x)$ 的周期为 2, 所以 -2, 4, -4 也是其周期.

于是 $f(-\frac{5}{2}) = f(-\frac{1}{2}-2) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}+a$, $f(\frac{9}{2}) = f(\frac{1}{2}+4) = f(\frac{1}{2}) = |-\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}| = \frac{1}{5}$.

由 $f(-\frac{5}{2}) = f(\frac{9}{2})$, 得 $-\frac{1}{2}+a = \frac{1}{5}$, $a = \frac{3}{5}$.

故 $f(5a) = f(3) = f(3-4) = f(-1) = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$.

2. 考查求函数解析式

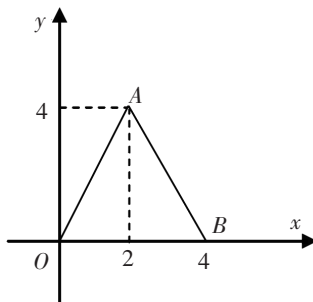
例 2. (2018 年皖江联盟模考卷文理 13) 若函数 $f(x)$ 的图

像是如图所示的折线段 OAB , 则函数解析式 $f(x) =$ _____.

解析: 由图像可知, 当 $x \in [0, 2]$ 时, 有 $y = 2x$.

当 $x \in (2, 4]$ 时, 由点 $(4, 0)$ 和点 $(2, 4)$, 得 $\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-4}{2-4}$, 即 $y = -2x + 8$.

所以函数的解析式为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x \leq 2) \\ -2x+8, & (2 < x \leq 4) \end{cases}$

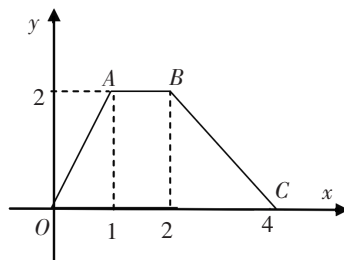


点评: 在求分段函数的解析式时, 根据自变量取值范围的不同, 要一段一段地求, 类似于求多个函数一样, 但最后要合并写成一个函数的形式. 注意图像中有“尖点”的, 往往是分段函数.

训练 2: 若函数 $f(x)$ 的图像是如图所示的折线段 $OABC$, 则函数解析式 $f(x) =$ _____.

解析:

$$y = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x < 1) \\ 2, & (1 \leq x < 2) \\ -x+4, & (2 < x \leq 4) \end{cases}$$



3. 考查函数值域问题

例 3. (2017 年合肥市模考卷理 8) 函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x \geq 1 \\ 2^x, & x < 1 \end{cases}$

的值域是 ()

A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

解析: 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 单调递减, $f(x) \leq f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, 此时的 $f(x)$ 值域是 $(-\infty, 0]$. 当 $x < 1$ 时, $f(x) = 2^x$ 单调递增, $f(x) < f(1) = 2$, 此时 $f(x)$ 的值域是 $(0, 2)$.

综上所述, $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 2)$. 故选 B.

点评: 分段函数是一个函数, 其定义域是各段函数定义域的并集, 值域也是各段函数值域的并集. 值域只有一个, 不能分段回答其值域. 处理分段函数值域问题一般有两种方法: 一是先分段求值域, 然后取并集; 二是作出分段函数的整体图像, 观察得到其值域.